3-Дәріс

<u>**Тақырыбы:**</u> **Монотонды тізбектің шегі. Тізбекшелер. Больцано-Вейерштрасс теоремасы. Тізбектің жоғарғы және төменгі шектері. Тізбек жинақтылығының Коши критерийі. Ақырсыз аз және ақырсыз үлкен тізбектер, олардың қасиеттері.**

Монотонды тізбектер.

Анықтама.

$\{x_n\}$ – өспелі тізбек, егер $x_n < x_{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$;

$\{x_n\}$ – кемімелі тізбек, егер $x_n > x_{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$;

$\{x_n\}$ – кемімейтін тізбек, егер $x_n \le x_{n+1}$, $\forall n \in \mathrm{N}$;

$\{x_n\}$ – өспейтін тізбек, егер $x_n \ge x_{n+1}, \forall n \in \mathrm{N}$.

Мұндай тізбектер монотонды тізбектер деп аталады. Өспелі және кемімелі тізбектері қатаң монотонды тізбектер деп аталады.

$\{x_n\}$ тізбегі жоғарыдан шенелген деп аталады, егер M саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $x_n < M$ болса, $\{x_n\}$ тізбегі төменнен шенелген деп аталады, егер m саны табылып, барлық $n \in \mathrm{N}$ үшін $m < x_n$ болса.

Теорема: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \approx 2{,}7183$.

Теорема: Кемімейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның жоғарыдан шенелген, ал өспейтін тізбектің шегінің бар болуы үшін оның төменнен шенелген болуы қажетті және жеткілікті.

Сондықтан, x_n - монотонды және шенелген тізбек болса, онда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < \infty$.

Монотонды тізбектер бір жақты шенелген, сондықтан кемімейтін тізбектің жоғарыдан шенелген болуы, ал өспейтін тізбектің төменнен шенелген болуы тізбектің шенелген болуымен тең мағыналы.

$\{x_n\}$ кемімейтін және жоғарыдан шенелген тізбек болғанда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_{n\in\mathrm{N}} x_n$.

$\{x_n\}$ өспейтін және төменнен шенелген тізбек болғанда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_{n\in\mathrm{N}} x_n$.

Тізбекшелер мен дербес шектер.

Анықтама. a_n тізбегі берілсін. $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ теңсіздіктерін қанағаттандыратын оң бүтін сандар тізбегін қарастырайық. Егер әрбір оң бүтін санына a_{n_k} санын сәйкес қойсақ, онда бұл тәуелділік тізбек болады. Сол тізбек

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$$

$\{a_n\}$ тізбегінің тізбекшесі деп аталады.

Тізбекшенің шегін тізбектің *дербес шегі* деп атайды.

Теорема. Егер a_n тізбегінің шегі бар және $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда оның кез келген $\{a_{n_k}\}$ тізбекшесінің де шегі бар болып: $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

Больцано-Вейерштрасс теоремасы. Кез келген тізбектен кемінде бір шегі бар болатын тізбекше бөліп алуға болады.

$\{x_n\}$ тізбегі берілсін. Онда оның ең үлкен және ең кіші дербес шектері бар болады. Ең үлкен дербес шекті *жоғарғы шек*, ал ең кіші дербес шекті *төменгі шек* деп атайды.

Коши критерийі

$\{x_n\}$ тізбегі фундаментальді немесе Коши тізбегі деп аталады, егер кез-келген $\varepsilon > 0$ саны үшін N нөмірі табылып, барлық $n > N, m > N$ үшін $|x_n - x_m| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

$\{x_n\}$ -фундаментальді тізбек$:= \forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathrm{N}$, $\forall n > N \forall m > N\left(|x_n - x_m| < \varepsilon\right)$.

Теорема (Коши критерийі). $\{x_n\}$ тізбегінің жинақты болуы үшін оның фундаментальді болуы қажетті және жеткілікті.

Ақырсыз аз және ақырсыз үлкен тізбектер, олардың қасиеттері.

Анықтама. a_n – ақырсыз аз тізбек $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, яғни кез келген $\varepsilon > 0$ саны арқылы N саны табылып, барлық $n > N$ үшін $|a_n| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын болса.

Ақырсыз аз тізбектердің қасиеттері.

Теорема. α_n, β_n – ақырсыз аз тізбектер $\Rightarrow$ $\alpha_n + \beta_n$ – ақырсыз аз тізбек.

Теорема. α_n, β_n – ақырсыз аз тізбектер $\Rightarrow$ $\alpha_n \cdot \beta_n$ – ақырсыз аз тізбек.

Теорема. a_n – шенелген тізбек, α_n – ақырсыз аз тізбек $\Rightarrow$ $a_n \cdot \alpha_n$ – ақырсыз аз тізбек.

Теорема. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow a_n = a + \alpha_n$, мұндағы α_n – ақырсыз аз тізбек.

Ақырсыз үлкен тізбектер.

Анықтама.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, егер $\forall\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \Rightarrow |a_n| > \varepsilon$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, егер $\forall\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n < -\varepsilon$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, егер $\forall\varepsilon > 0\, \exists N : \forall n > N \Rightarrow a_n > \varepsilon$.

Теорема.

1) a_n - ақырсыз үлкен тізбек $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{a_n}$ – ақырсыз аз тізбек.

2) α_n – ақырсыз аз тізбек, $\alpha_n \neq 0$ $(\forall n > N_0) \Rightarrow$ $\dfrac{1}{\alpha_n}$ – ақырсыз үлкен тізбек.